Variation des fonctions composées

1 Fonction affine

1.1 Variation

Définition 1.1 *Une fonction affine est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{f(x) = m \times x + p}$
avec m *et* p *deux réels.*

Théorème 1.2 *Variations Une fonction affine est :*

1. ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *si* $\boxed{m > 0}$.
2. ***strictement décroissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *si* $\boxed{m < 0}$.
3. ***constante*** *sur* $\mathbb{R}$ *si* $\boxed{m = 0}$.

Propriété 1.3 *Dans un repère, la courbe d'une fonction affine est une* ***droite*** *non parallèle à l'axe des ordonnées.*

1.2 Variation de $x \longmapsto g(x) + k$

Propriété 1.4 *Soit* g *une fonction définie sur* I*. Alors* g *et* $g + k$ *ont le même sens de variation.*

Exemple 1.5 Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = x^2 + 4$.

Solution : $h(x) = g(x) + k$ *avec* $g(x) = x^2$*.* g *est décroissante sur* $]-\infty; 0]$ *puis croissante sur* $[0; +\infty[$*. De même pour* h*.*

Exercice 1 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x} - 3$.

1.3 Variation de $x \longmapsto k \times g(x) \quad k \neq 0$

Propriété 1.6 *Soit* g *une fonction définie sur* I*.*

1. *Si* $k > 0$ *, alors* g *et* $k \times g$ *ont le même sens de variation.*
2. *Si* $k < 0$ *, alors* g *et* $k \times g$ *ont un sens de variation contraire.*

Exemple 1.7 Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = -3x^2$.

Solution : $h(x) = kg(x)$ *avec* $g(x) = x^2$*.* g *est décroissante sur* $]-\infty; 0]$ *puis croissante sur* $[0; +\infty[$*. Or* $k < 0$ *donc* h *est croissante sur* $]-\infty; 0]$ *puis décroissante sur* $[0; +\infty[$*.*

Exercice 2 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{-4}{x}$.

Exercice 3 On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		3		5		8
$f(x)$	5	↘	0	↘	-4	↗	-1

Dresser le tableau de variation de $f - 1$, $2f$, $-3f + 4$.

2 Fonction carré

2.1 Variation

Définition 2.1 *La fonction* ***carrée*** *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{f(x) = x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Théorème 2.2 *Variations La fonction carrée est :*

1. ***strictement décroissante*** *sur* $\boxed{]-\infty;0]}$.
2. ***strictement croissante*** *sur* $\boxed{[0;+\infty[}$.

Elle admet sur $\mathbb{R}$ *un* ***minimum*** *égal à* 0*, atteint en* 0.

2.2 Variation de $x \longmapsto g^2(x)$

Propriété 2.3 *Soit* g *une fonction définie sur* I.

1. *Si* g *est positive sur* I*, alors* g *et* g^2 *ont le même sens de variation.*
2. *Si* g *est négative sur* I*, alors* g *et* g^2 *ont un sens de variation contraire.*

Remarque *On retrouve ainsi le sens de variation d'un trinôme en utilisant que* $f(x) = a(x + \dfrac{b}{2a})^2 + \alpha$.

Exemple 2.4 Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = (2x-4)^2$.

Solution : $h(x) = g^2(x)$ *avec* $g(x) = 2x - 4$. g *est croissante sur* $\mathbb{R}$. *On cherche le signe de* $2x - 4$.
g *est négative sur* $]-\infty;2]$ *et positive sur* $[2;+\infty[$.
Donc g^2 *est décroissante sur* $]-\infty;2]$ *et croissante sur* $[2;+\infty[$

Exercice 4 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = (3-x)^2$.

Exercice 5 Démontrer,avec des inégalités,que la fonction h définie par $h(x) = (1+x)^2$ est décroissante sur $[-3;-2]$.

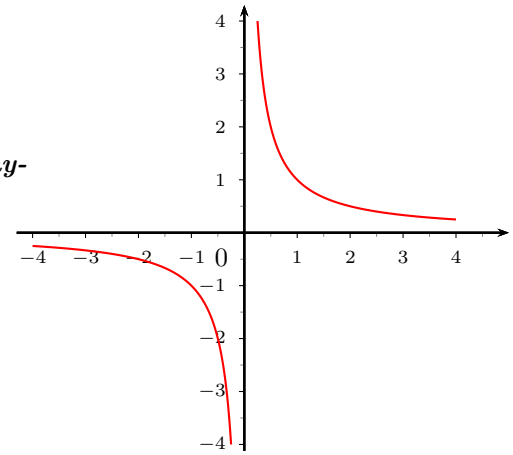
Exercice 6 On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		3		5		8
$f(x)$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

Dresser le tableau de variation de f^2.

3 Fonction inverse

3.1 Variation



Définition 3.1 *La fonction* ***inverse*** *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Propriété 3.2 *Dans un repère, la courbe de la fonction inverse est une* ***hyperbole****.*
L'origine O *est un centre de symétrie.*

Théorème 3.3 *Variations La fonction inverse est :*

1. ***strictement décroissante*** *sur* $\boxed{]-\infty;0[}$.
2. ***strictement décroissante*** *sur* $\boxed{]0;+\infty[}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

3.2 Variation de $x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$

Propriété 3.4 *Soit* g *une fonction définie sur* I *tel que* $g(x) \neq 0$ *sur* I.

Alors g *et* $\dfrac{1}{g}$ *ont un sens de variation contraire.*

Exemple 3.5 Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{4-2x}$.

Solution : $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ *avec* $g(x) = 4 - 2x$.
$h(x)$ *est définie si* $4 - 2x \neq 0$ *soit* $x \neq 2$. *Or* g *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.
$\dfrac{1}{g}$ *est croissante sur* $]-\infty;2[$ *et croissante sur* $]2;+\infty[$

Exercice 7 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

Exercice 8 Démontrer,avec des inégalités,que la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x+5}$ est décroissante sur $[7;12]$.

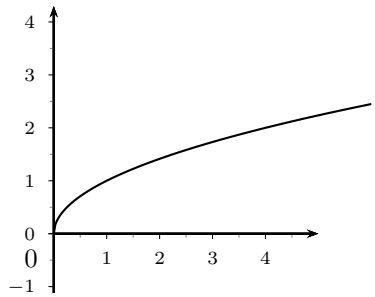
Exercice 9 On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		3		5		8
$f(x)$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

Dresser le tableau de variation de $\dfrac{1}{f}$.

4 Fonction racine carrée

4.1 Variation



Définition 4.1 *La fonction* ***racine carrée*** *est définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$.

Propriété 4.2 *Dans un repère, la courbe de la fonction racine carrée est une "demi-parabole".*

Théorème 4.3 *Variations La fonction racine carrée est* ***strictement croissante*** *sur* $\boxed{[0;+\infty[}$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

4.2 Variation de $x \longmapsto \sqrt{g(x)}$

Propriété 4.4 *Soit g une fonction définie sur I tel que $g(x) \geqslant 0$ sur I.*

Alors g et $\sqrt{g(x)}$ ont le même sens de variation.

Exemple 4.5 Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{4-2x}$.

Solution : $h(x)=\sqrt{g(x)}$ *avec* $g(x)=4-2x$.
$h(x)$ *est définie si* $4-2x \geqslant 0$ *soit* $x \leqslant 2$.*Donc h est définie sur* $]-\infty;2]$.
Or g est décroissante sur $\mathbb{R}$. *Donc* $\sqrt{g}$ *est aussi décroissante sur* $]-\infty;2]$.

Exercice 10 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Exercice 11 Démontrer,avec des inégalités,que la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x^2+5}$ est croissante sur $[3;10]$.

Exercice 12 On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2	3	5	8
$f(x)$	5 ↘	0 ↘	-4 ↗	-1

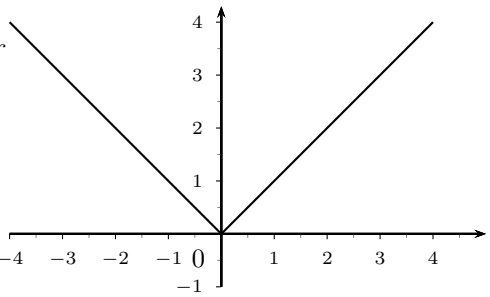
Dresser le tableau de variation de $\sqrt{f}$.

5 Fonction valeur absolue

5.1 Variation

Définition 5.1 *La fonction* ***valeur absolue*** *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{f(x) = |x|}$ *:*

1. *si* $x > 0$, $|x| = x$
2. *si* $x < 0$, $|x| = -x$



Exemple 5.2 $|6| = 6$ $\quad |-5| = 5$ $\quad |10,7| = ...$ $\quad |-2,56| = ...$

Remarque $|x|$ *correspond à la distance entre le point M de coordonneés* $(x; 0)$ *et l'origine du repère.*

Propriété 5.3 *Dans un repère, la courbe de la fonction valeur absolue est la réunion de deux demi-droites.*

Théorème 5.4 *Variations La fonction valeur absolue est :*

1. ***strictement décroissante*** *sur* $\boxed{]-\infty; 0]}$.
2. ***strictement croissante*** *sur* $\boxed{[0; +\infty[}$.

Elle admet sur $\mathbb{R}$ *un* ***minimum*** *égal à* 0*, atteint en* 0*.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

5.2 Variation de $x \longmapsto |g(x)|$

Propriété 5.5 *Soit* g *une fonction définie sur* I*.*

1. *Si* g *est positive sur* I*, alors* g *et* $|g|$ *ont le même sens de variation.*
2. *Si* g *est négative sur* I*, alors* g *et* $|g|$ *ont un sens de variation contraire.*

Exemple 5.6

Donner le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = |2x - 4|$.

Solution : $h(x) = |g(x)|$ *avec* $g(x) = 2x - 4$*.* g *est croissante sur* $\mathbb{R}$*. On cherche le signe de* $2x - 4$*.*
g *est négative sur* $]-\infty; 2]$ *et positive sur* $[2; +\infty[$*.*
Donc $|g|$ *est décroissante sur* $]-\infty; 2]$ *et croissante sur* $[2; +\infty[$

Remarque *L'expression de* $|2x - 4|$ *suivant les valeurs de* x *est donnée par :*

1. $|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$ *sur* $]-\infty; 2]$*.* $(m = -2)$
2. $|2x - 4| = 2x - 4$ *sur* $[2; +\infty[$*.* $(m = 2)$

On retrouve ainsi le sens de variation de la fonction h *ci-dessus.*

Exercice 13 Déterminer le tableau de variation de la fonction h définie par $h(x) = |x^2 - x - 2|$.

Exercice 14 On considère ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2	3	5	8
$f(x)$	5 ↘	0 ↘	-4 ↗	-1

Dresser le tableau de variation de $|f|$.